Esercizi di Analisi Matematica

11 novembre 2022

Svolti dal Prof. Gianluigi Trivia (scritti con Lyx)

1 LE FUNZIONI

Esercizio 1. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

1. $\mid x-1 \mid < 3$
2. $\mid x+1 \mid > 2$
3. $\mid 2x+1 \mid < 1$
4. $\mid x-1 \mid < \mid x+1 \mid$

Caso (a): $\mid x-1 \mid < 3$, risolvo $\begin{cases} x-1<3 \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x+1<3 \\ x<1 \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x<4 \\ x \geq 1 \end{cases}$ cioè $1 \leq x < 4$ e $\begin{cases} x>-2 \\ x<1 \end{cases}$ cioè $-2<x<1$. L'unione tra le due dà la soluzione $-2<x<4$

Caso (b): $\begin{cases} x+1>2 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x-1>2 \\ x<-1 \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x>1 \\ x \geq -1 \end{cases}$ cioè $x>1$ e $\begin{cases} x<-3 \\ x<-1 \end{cases}$ cioè $x<-3$, pertanto $x<-3 \cup x>1$

Caso (c): $\begin{cases} 2x+1<1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} -2x-1<1 \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x<0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ e $\begin{cases} x>-1 \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $-1<x<-\frac{1}{2}$. pertanto $-1<x<0$

Caso (d): in questo caso, $\begin{cases} -x+1<-x-1 \\ x<-1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x+1<x+1 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} 0<-2 \\ x<1 \end{cases}$ cioè non si hanno soluzioni e $\begin{cases} x>0 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}$ cioè $0<x<1$ e $\begin{cases} 0<2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ cioè $x \geq 1$; si avrà pertanto $x>0$

1.1 Dominio e Codominio

Esercizio 2. Trovare $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ se $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Si tratta di trovare le immagini dei valori di x indicati, sostituendo all'incognita il valore indicato:

$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) - 6 = -1 - 6 - 11 - 6 = -24$

$f(0) = (0)^3 - 6 \cdot (0)^2 + 11 \cdot (0) - 6 = -6$

$f(1) = (1)^3 - 6 \cdot (1)^2 + 11 \cdot (1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ in questo caso $x = 1$ è una radice della funzione polinomiale

$f(2) = (2)^3 - 6 \cdot (2)^2 + 11 \cdot (2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$ anche $x = 2$ è una radice

$f(3) = (3)^3 - 6 \cdot (3)^2 + 11 \cdot (3) - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$ $x = 3$ è un'altra radice

$f(4) = (4)^3 - 6 \cdot (4)^2 + 11 \cdot (4) - 6 = 64 - 96 + 44 - 6 = 6$

Avendo trovato le 3 radici di una funzione polinomiale di terzo grado, possiamo vedere che, tale polinomio si può scomporre nel prodotto dei seguenti fattori: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

Esercizio 3. Trovare $f(0)$, $f(-\frac{3}{4})$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $1/f(x)$ se $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$f(0) = \sqrt{1+(0)^2} = 1$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}$

$f(-x) = \sqrt{1+(-x)^2} = f(x) = \sqrt{1+x^2}$ la funzione è quindi pari

$f(\frac{1}{x}) = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2} = \frac{f(x)}{|x|}$

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{f(x)}{[f(x)]^2}$

Esercizio 4. Sia $f(x) = \arccos(\log x)$. Calcolare $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$

$f\left(\frac{1}{10}\right) = \arccos\left(\log\frac{1}{10}\right) = \arccos(-\log 10) = \arccos(-1) = \pi$

$f(1) = \arccos(\log 1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

$f(10) = \arccos(\log 10) = \arccos(1) = 0$

Esercizio 5. Sia $f(x)$ una funzione lineare. Determinare questa funzione se $f(-1) = 2$ e $f(2) = -3$

Soluzione. Una funzione lineare in forma esplicita è del tipo $y = mx + q$, una funzione, quindi, con due parametri, m, q. Per determinarli, bastano quindi le due condizioni.

$$\begin{cases} 2 = -1m + q \\ -3 = 2m + q \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = -1m + q \\ 5 = -3m \end{cases} \quad \begin{cases} m = -\frac{5}{3} \\ q = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

la funzione richiesta è quindi: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ o in forma implicita, $5x + 3y - 1 = 0$

Esercizio 6. Determinare una funzione razionale intera $f(x)$ di secondo grado se $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 5$.

Soluzione. Una funzione razionale espressa nella forma esplicita è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. E' una funzione con tre parametri a, b, c. La loro individuazione richiede l'impostazione e la risoluzione di un sistema tre equazioni tre incognite

$$\begin{array}{c} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(3) = 5 \end{array} \begin{cases} 1 = c \\ 0 = a + b + c \\ 5 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 - b \\ -9 - 9b + 3b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{6} \\ b = -\frac{13}{6} \\ c = 1 \end{cases}$$

l'equazione di secondo grado cercata è pertanto $y = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$

Esercizio 7. Si sa che $f(4) = -2$ e che $f(5) = 6$. Calcolare il valore approssimato di $f(4,3)$ considerando la funzione $f(x)$ lineare per il segmento $4 \leq x \leq 5$ (*interpolazione lineare della funzione*).

Soluzione. l'interpolazione lineare presuppone che la curva tra i due punti possa essere approssimata dalla retta che congiunge i due punti $A(4;-2)$ e $B(5;6)$.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y+2}{6+2} = \frac{x-4}{5-4}$$
$$\frac{y+2}{8} = x-4$$

da cui si ottiene:

$$y = 8x - 34$$

calcoliamo ora $f(4,3)$ sostituendo $x = 4,3$. Si ha

$$y = 8 \cdot 4,3 - 34 = 0,4$$

Esercizio 8. Trovare il campo di esistenza delle funzioni:

- $y = \frac{x^2-4x}{3-x}$: funzione razionale; i valori della x che annullano il denominatore non hanno una immagine nel codominio; per essi quindi la funzione non esiste

  $$3 - x \neq 0 \qquad x \neq 3$$

  si può esprimere anche: $\mathbb{R} - \{\nVdash\}$oppure

  $$(-\infty;3) \cup (3;+\infty)$$

- $y = \frac{x^2-x}{x^2-4x+4}$: funzione razionale, che, ricordando i prodotti notevoli, si può riscrivere nella forma

  $$y = \frac{x^2-x}{(x-2)^2}$$

  il denominatore si annulla per $x = 2$, e il campo di esistenza sarà

  $$\mathbb{R} - \{\nvDash\} \quad \textit{oppure} \quad (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$$

- $y = \frac{x^3+2x}{x^2-3x+2}$: funzione razionale; il denominatore si annulla per $x = 1$ e $x = 2$ per cui, il campo di esistenza sarà

  $$\mathbb{R} - \{\nVdash;\nvDash\} \quad \textit{oppure} \quad (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$$

- $y = \sqrt{x+1}$: funzione irrazionale; nel caso di una radice di indice pari, il radicando deve essere non negativo

  $$x + 1 \geq 0 \qquad x \geq -1$$

  oppure

  $$[-1;+\infty)$$

- $y = \sqrt[3]{x+1}$: la radice ha indice dispari; ha significato per qualunque radicando $(-\infty; +\infty)$

- $y = \frac{1}{4-x^2}$: una funzione razionale è sempre definita tranne per i valori che annullano il denominatore

$$x \neq \pm 2$$
$$(-\infty; -2) \cup \quad (-2; +2) \cup \quad (2; +\infty)$$

- $y = \sqrt{x^2 - 2}$: funzione irrazionale, il radicando deve essere non negativo

$$x^2 - 2 \geq 0 \quad x \leq -\sqrt{2} \quad \vee x \geq \sqrt{2}$$
$$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \quad \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$$

- $y = \sqrt{2 + x - x^2}$: funzione irrazionale; il radicando deve essere non negativo

$$-x^2 + x + 2 \geq 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = 2; -1$$
$$-1 \leq x \leq 2$$

il campo di esistenza è pertanto $[-1; 2]$

- $y = \frac{x+2}{x-\sqrt{x+2}}$: funzione fratta con denominatore irrazionale; l'individuazione del campo di esistenza passa attraverso il verificarsi contemporaneo delle due condizioni: 1° denominatore diverso da zero e radicando non negativo. Le due condizioni vanno quindi messe a sistema, per ottenere lo/gli intervallo/i comune/i.

$$\begin{cases} x - \sqrt{x+2} & \neq & 0 \\ x + 2 & \geq & 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 & \neq & 0 \\ x & \geq & -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 2 & & x \neq -1 \\ x & \geq & -2 \end{cases}$$

il campo di esistenza sarà

$$[-2; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$$

- $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$: in questo caso vi sono due radicali e quindi due saranno le condizioni che dovranno essere contemporaneamente soddisfatte:

$$\begin{cases} -x \geq 0 & x \leq 0 \\ 2 + x > 0 & x > -2 \end{cases}$$

l'intervallo comune è $(-2; 0]$

- $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$: funzione fratta con numeratore irrazionale e denominatore razionale. In tal caso le condizioni per la determinazione del campo di esistenza sono duplici, la prima riguardante il radicale, che deve essere non negativo, e la seconda relativa all'annullamento del denominatore che rende la frazione priva di significato. Pertanto

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Il C.E si potrà scrivere anche

$$]-3;1) \quad \cup \quad (1;+\infty)$$

- $y = \left(x^4 - 1\right)^{\frac{1}{4}}$: la funzione è irrazionale per la presenza dell'esponente razionale e l'indice della radice è pari, 4; il suo radicando deve essere non negativo

$$x^4 - 1 \geq 0$$

che si può scomporre in

$$(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right) \geq 0$$

il termine di grado 2 è sempre positivo, per cui

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\, fattore & x \geq 1 \\ 2^\circ\, fattore & x \geq -1 \end{array}$$

Il CE sarà quindi

$$\begin{array}{ccc} x \leq -1 & \vee & x \geq 1 \\ (-\infty;-1[& &]1;+\infty) \end{array}$$

- $y = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$: funzione irrazionale con radicando irrazionale. Due condizioni

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x-1} \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad CE: \quad [1;2]$$

- $y = \lg\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$: la funzione logaritmica è definita quando l'argomento è maggiore di zero:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$

risolviamo la disequazione fratta

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > -2 \\ D > 0 & x < 2 \end{array}$$

si ottiene, come campo di esistenza, $(-2;2)$.

- $y = \frac{e^x}{\ln^2 x - 4}$; funzione trascendente con al numeratore una funzione esponenziale e al denominatore una funzione logaritmica. La funzione esponenziale è definita per ogni valore di x; il logaritmo al denominatore deve avere argomento positivo e il denominatore stesso deve essere diverso da zero. Riassumendo

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x - 4 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq \pm 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2, \frac{1}{e^2} \end{cases}$$

Il CE, sotto forma di intervalli, sarà

$$\left(0; \frac{1}{e^2}\right) \cup \quad \left(\tfrac{1}{e^2}; e^2\right) \cup \quad \left(e^2; +\infty\right)$$

- $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$: la funzione inversa del coseno richiede che il suo argomento sia compreso tra -1 e 1 e inoltre l'argomento frazionario richiede che il denominatore non si annulli,

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq \quad 1 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x}{1+x} \geq -1 \\ \frac{2x}{1+x} \leq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3x+1}{1+x} \geq 0 \\ \frac{x-1}{1+x} \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

studiamo le due disequazioni fratte, la cui risoluzione assorbe la condizione relativa al denominatore

  - $\frac{3x+1}{1+x} \geq 0$ $\begin{array}{ll} N \geq 0 & x \geq -\frac{1}{3} \\ D > 0 & x > -1 \end{array}$ da cui si ottiene $x < -1 \vee x \geq -\frac{1}{3}$
  - $\frac{x-1}{1+x} \leq 0$ $\begin{array}{ll} N \geq 0 & x \geq 1 \\ D > 0 & x > -1 \end{array}$ da cui si ottiene $-1 < x \leq 1$
  - riassumendo le condizioni trovate, che devono valere contemporaneamente, si ha $-\frac{1}{3} \leq\leq 1$ oppure $[-\frac{1}{3}; 1]$

- $y = \sqrt{\sin 2x}$: il radicale deve essere non negativo

$$\sin \geq 0 \quad 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi \quad k\pi \leq x \leq \pi + k\pi$$

Esercizio 9. Sia $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$. Trovare

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad e \quad \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Soluzione 10. primo caso

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}\left[2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(4x^4 - 10x^2 - 20\right) \\ &= 2x^4 - 5x^2 - 10 \end{aligned}$$

secondo caso

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}\left[2x^4-3x^3-5x^2+6x-10-2x^4-3x^3+5x^2+6x+10\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(-6x^3+12x\right)\\ &= -3x^3+6x\end{aligned}$$

osservando i due risultati si può osservare che: $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

Esercizio 11. La funzione $f(x)$ definita nel campo simmetrico $-l<x<l$ si dice *pari* se $f(x)=f(-x)$ e *dispari* se $f(-x)=-f(x)$. Indicare se le funzioni sono pari o dispari:

- $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$: calcoliamo $f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^x\right)$ da cui si ha $f(x)=f(-x)$ funzione pari
- $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$: calcoliamo $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$ da cui si ha $f(x)=f(-x)$ funzione pari
- $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$: calcoliamo $f(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$ funzione dispari

Esercizio 12. Dimostrare che ogni funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $-l<x<l$ può essere espressa come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

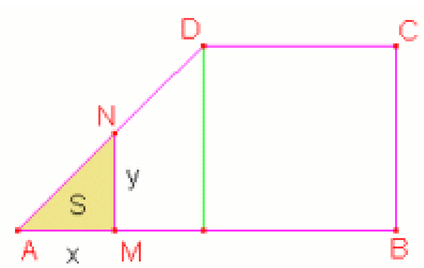
Soluzione. abbiamo visto in precedenza che

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$$

ma $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]$ è pari poiché $\varphi(x)=\varphi(-x)=\frac{1}{2}\left[f(-x)+f(x)\right]$ e $\psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$ è dispari poiché $\psi(-x)=\frac{1}{2}\left[f(-x)-f(x)\right]=-\psi(x)$; ne segue che

$$f(x)=\underbrace{\varphi(x)}_{pari}+\underbrace{\psi(x)}_{dispari}$$

Esercizio 13. Esprimere la lunghezza del segmento $y=MN$ e l'area S della figura AMN come funzioni di $x=AM$ (fig.1), dove $AB=a$; $BC=b$; $AH=c$. Costruire il grafico di queste funzioni

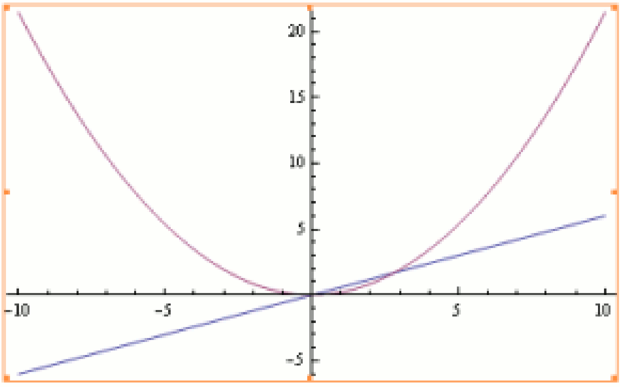


Soluzione 14. I due triangoli rettangoli AHD e AMN sono tra loro simili, perciò $AH : BC = AM : MN \quad c : b = x : y$. Ne segue che $y = \frac{b}{c}x$ con $b > c$. La superficie del triangolo è

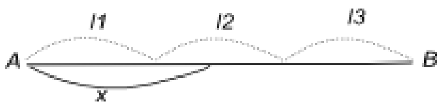
$$S = x \cdot \frac{b}{c}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2c}x^2$$

con $0 \leq x \leq c$

La funzione $y(x)$ è rappresentabile mediante una retta passante per l'origine (senza termine noto) e con coefficiente angolare $\frac{b}{c}$, mentre la funzione $S(x)$ è una parabola di vertice $V(0;0)$ e concavità rivolta verso l'alto.



Esercizio 15. 1 - La densità lineare (massa dell'unità di lunghezza) di una asta $AB = l$, vedi figura, è rispettivamente uguale a q_1, q_2, q_3 per i segmenti $AC = l_1$, $CD = l_2$, e $DB = l_3$ con $(l_1 + l_2 + l_3 = l)$. Esprimere la massa m del segmento di lunghezza variabile $AM = x$ di questa asta in funzione di x. Costruire il grafico di questa funzione.



Soluzione. le densità lineari nei vari tratti sono indicate da:

$$q_1 = \frac{m_1}{l_1} \quad q_2 = \frac{m_2}{l_2} \quad q_3 = \frac{m_3}{l_3}$$

- se $0 \leq x \leq l_1$ allora $q_1 = \frac{m}{x}$ e $m = q_1 x$. negli estremi: $x = 0 \Rightarrow m = 0$; $x = l_1 \Rightarrow m = m_1$
- se $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$ allora $m = q_1 l_1 + q_2 (x - l_1) = q_1 l_1 + q_2 x - q_2 l_1 = q_2 x + l_1 (q_1 - q_2)$; negli estremi: $x = l_1 \Rightarrow m = m_1$; $x = l_1 + l_2 \Rightarrow m = m_2 + m_1$
- se $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$ allora $m = q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 (x - l_1 - l_2) = q_3 x + l_1 (q_1 - q_3) + l_2 (q_2 - q_3)$; negli estremi: $x = l_1 + l_2 \Rightarrow m = m_1 + m_2$; $x = l \Rightarrow m = q_3 l_1 + q_3 l_2 + q_3 l_3 + q_1 l_1 - q_3 l_1 + q_2 l_2 - q_3 l_2 = m_1 + m_2 + m_3$
- Il grafico è una retta nel piano x, m

Esercizio 16. Trovare $\varphi[\psi(x)]$ e $\psi[\varphi(x)]$ se $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = 2^x$

Soluzione. $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$; $\psi[\varphi(x)] = 2^{x^2}$

Esercizio 17. Trovare $f\{f[f(x)]\}$ se $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Soluzione. $f[f(x)] = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1-x$; $f\{f[f(x)]\} = 1-1+x = x$

Esercizio 18. Trovare $f(x+1)$ se $f(x-1) = x^2$

Soluzione. $f(x) = (x+1)^2$ e $f(x+1) = (x+2)^2$

Esercizio 19. Determinare le radici positive e negative della funzione y se:

- $y = x+1$ $\begin{array}{lll} y>0 & x+1>0 & -1<x<2 \\ y<0 & x+1<0 & x<-1 \end{array}$
- $y = 2+x-x^2$ $\begin{array}{lll} y>0 & 2+x-x^2 & x>-1 \\ y<0 & 2+x-x^2<0 & x<-1 \vee x>2 \end{array}$
- $y = x^3-3x$ raccogliendo: $y = x\left(x^2-3\right)$; studiamo il segno dei due fattori e quindi quello del prodotto:
$$\begin{array}{lll} 1^\circ\, fattore & x>0 & \\ 2^\circ\, fattore & x^2-3>0 & x<-\sqrt{3} \;\vee\; x>\sqrt{3} \end{array}$$
il prodotto sarà $\begin{array}{ll} >0 & -\sqrt{3}<x<0 \vee x>\sqrt{3} \\ <0 & x<-\sqrt{3} \vee 0<x<\sqrt{3} \end{array}$
- $y = \log\frac{2x}{1+x}$ il logaritmo è positivo quando l'argomento è >1 e negativo quando è tra 0 e 1; studiamo pertanto la frazione che rappresenta l'argomento del logaritmo
$$\frac{2x}{1+x}>1 \qquad \frac{x-1}{1+x}>0$$
$$\begin{array}{ll} N>0 & x>1 \\ D>0 & x>-1 \end{array}$$
si avrà $y>0$ per $x<-1 \vee x>1$ e $y<0$ per $-1<x<1$.

Esercizio 20. Determinare la funzione inversa di y se:

- $y = 2x+3$ con *dominio* : $(-\infty;+\infty)$ e *codominio* $= (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $x = \frac{y-3}{2}$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$.
- $y = x^2-1$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = [-1;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $x = \pm\sqrt{y+1}$ con $D = [-1;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$
- $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ con *dominio* : $(-\infty;+\infty)$ e *codominio* $= (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $y^3 = 1-x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1-y^3}$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$

- $y=\log\frac{x}{2}$ con $D=(0;+\infty)$ e $C=(-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $10^y=\frac{x}{2}$ da cui $x=2\cdot 10^y$ con $D=(-\infty;+\infty)$ e $C=(0;+\infty)$

- $y=\arctan 3x$ con $D=(-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $3x=\tan y$ da cui $x=\frac{1}{3}\tan y$ con $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

Esercizio 21. Sia data la funzione

$$y=\begin{cases} x & per \quad x\le 0 \\ x^2 & per \quad x>0 \end{cases}$$

trovarne la funzione inversa

Soluzione 22. risolvendo rispetto a x si ha

$$x=\begin{cases} y & per \quad y\le 0 \\ \sqrt{y} & per \quad y>0 \end{cases}$$

Esercizio 23. Esprimere le funzioni date in forma di successione di uguaglianze tali che ciascun termine di questa successione sia costituito da una funzione elementare (potenza, esponenziale, trigonometrica, ecc)

1. $y=(2x-5)^{10}$: pongo $u=2x-5$ e ottengo $y=u^{10}$
2. $y=2^{\cos x}$: pongo $u=\cos x$ e ottengo $y=2^u$
3. $y=\lg\tan\frac{x}{2}$: pongo $u=\frac{x}{2}$ e $v=\tan u$ e ottengo $y=\lg v$
4. $y=\arcsin\left(3^{-x^2}\right)$: pongo $u=x^2$ e $v=3^u$ e ottengo $y=\arcsin v$

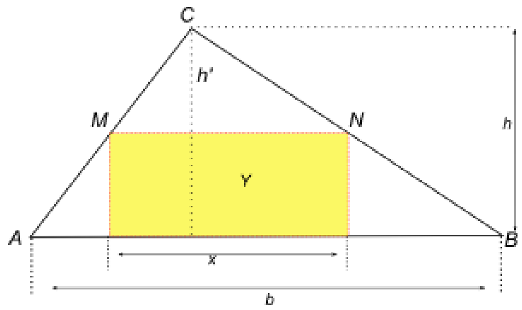
Esercizio 24. Trascrivere le funzioni date in forma di successioni di uguaglianze con l'aiuto di una sola uguaglianza:

1. $y=u^2$, $u=\sin x$; si ha $y=\sin^2 x$
2. $y=\arctan u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$; si ha $y=\arctan\lg^{\frac{1}{2}} x$
3. $y=\begin{cases} 2u & se \quad u\le 0 \\ 0 & se \quad u>0 \end{cases}$ e $u=x^2-1$; si ha $y=\begin{cases} 2\left(x^2-1\right) & se \quad -1\le x\le 1 \\ 0 & se \quad x<-1\vee x>1 \end{cases}$

Esercizio 25. Trovare l'espressione esplicita delle funzioni y date dalle equazioni:

1. $x^2-\arccos y=\pi$; si ha $\arccos y=x^2-\pi$ da cui $y=\cos\left(x^2-\pi\right)=\cos\left(\pi-x^2\right)$ (la funzione coseno è pari); infine $y=-\cos x^2$
2. $x+\mid y\mid=2y$; si ha $\begin{cases} x+y=2y & se \quad y\ge 0 \\ x-y=2y & se \quad y<0 \end{cases}$ da cui si ottiene $\begin{cases} x=y & se \quad y\ge 0 \\ x=3y & se \quad y<0 \end{cases}$
3. $10^x+10^y=10$; si ha $10^y=10-10^x$ passando al logaritmo decimale si ottiene: $y=\log\left(10-10^x\right)$

Esercizio 26. Un rettangolo è inscritto in un triangolo di base $b = 10$ e di altezza $h = 6$ (vedi figura). Esprimere l'area y di questo rettangolo come funzione della sua base x. Costruire il grafico di questa funzione e trovare il suo valore massimo.



Soluzione. I due triangoli ABC e MNC sono simili, essendo le basi del rettangolo parallele.

$$b : x = h : h^{'}$$

dove $h^{'}$ rappresenta l'altezza del triangolo MNC. Si ha quindi

$$h^{'} = \frac{h}{b}x$$

L'altezza del rettangolo è pertanto

$$h - h^{'} = h - \frac{h}{b}x = \frac{h\,(b - x)}{b}$$

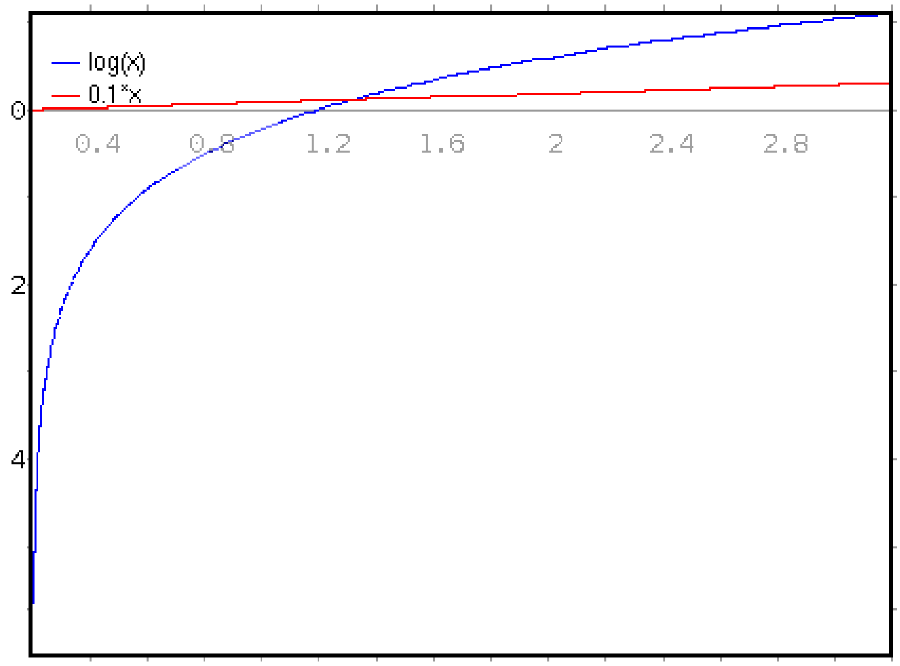
L'area del rettangolo si può quindi esprimere

$$y = x \cdot \frac{h\,(b - x)}{b} = -\frac{h}{b}x^2 + hx$$

La funzione si rappresenta graficamente mediante una parabola di vertice $V\left(\frac{b}{2}; \frac{hb}{4}\right)$ e intersezioni con l'asse x nei punti $O\,(0;0)$ e $A\,(-b;0)$
Essendo la parabola rivolta verso il basso, il suo valore massimo è rappresentato dallo stesso vertice.

Esercizio 27. Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

- $\log x = 0,1x$: la soluzione grafica passa attraverso l'analisi della intersezione tra le due curve che rappresentano separatamente il primo e il secondo membro, cioè scindiamo l'equazione nel seguente sistema:
$$\begin{cases} y = \log x \\ y = 0,1x \end{cases}$$
in questo modo si deve rappresentare due funzioni elementari, una logaritmica di base 10 ed una retta passante per l'origine di coefficiente angolare $m = 0,1$. I due grafici sono rappresentati nella figura sottostante:

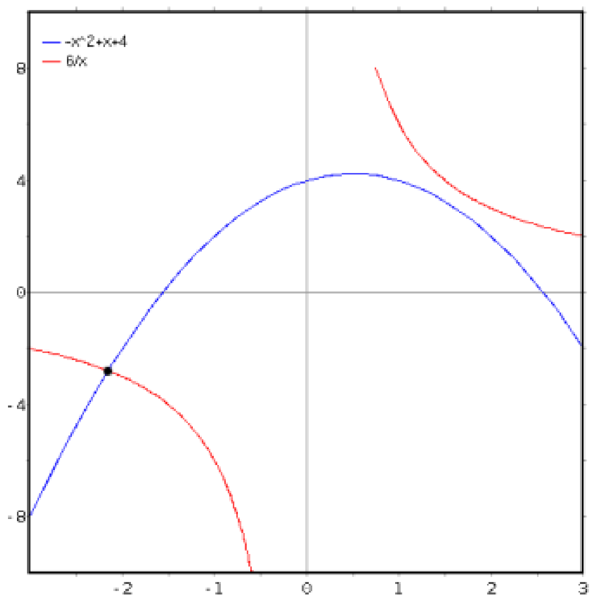


La soluzione si ha pertanto per un valore di x compreso tra $1,3$ e $1,4$.

Esercizio 28. Risolvere graficamente il sistema di equazioni

$$\begin{cases} xy & = & 6 \\ x^2 - x + y & = & 4 \end{cases}$$

Soluzione. la prima equazione rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri assi (una classica proporzionalità inversa), la seconda equazione rappresenta la parabola $y = -x^2 + x + 4$ di vertice $V(-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; -\frac{\triangle}{4a} = \frac{17}{4})$ e con concavità rivolta verso il basso (coefficiente di x^2 negativo). La soluzione è rappresentata dal punto di intersezione (evidenziato) tra le due curve, come si può osservare nella figura sottostante:

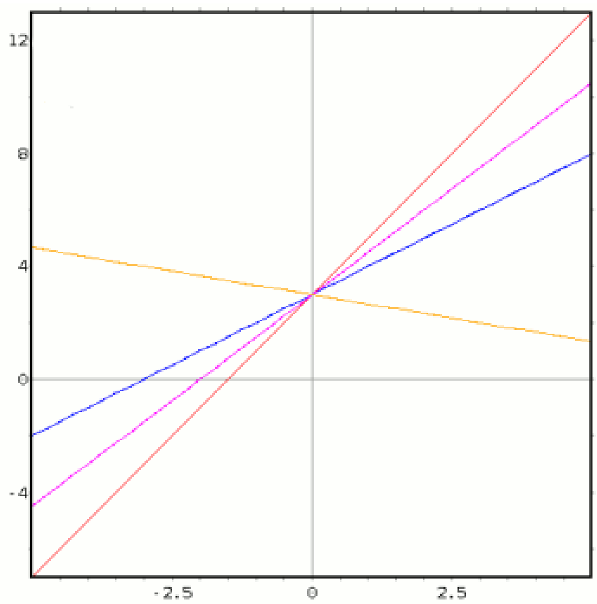


2 GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Esercizio 29. Costruire i grafici delle funzioni lineari (rette).

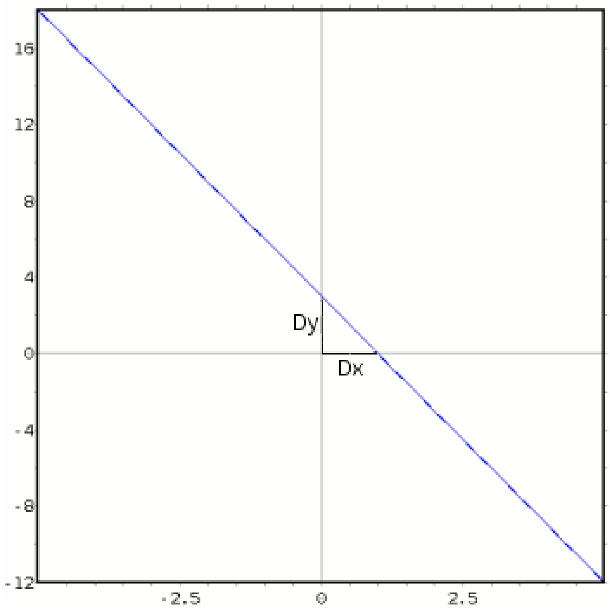
L'equazione generale di una retta nella forma esplicita è del tipo $y = mx + q$, dove m è detto coefficiente angolare e q ordinata all'origine. Questi due parametri hanno un semplice significato geometrico: q rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y e m rappresenta il coefficiente angolare, cioè, la «pendenza» della retta e rappresenta il rapporto tra la variazione delle ordinate di due punti qualsiasi e la corrispondente variazione delle loro ascisse; in formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dove x_1, x_2 sono le ascisse dei due punti e y_1, y_2 le rispettive ordinate.

La rappresentazione grafica di una retta, identificabile tramite due soli punti, è facilmente ottenibile dalla conoscenza di questi due parametri.



Assegnato ad esempio $q = 3$ si ottiene un fascio di rette passanti per il punto $Q(0; 3)$; la seconda informazione sul valore di m consente di individuare in modo univoco la retta.

La figura sotto mostra il significato grafico di m:

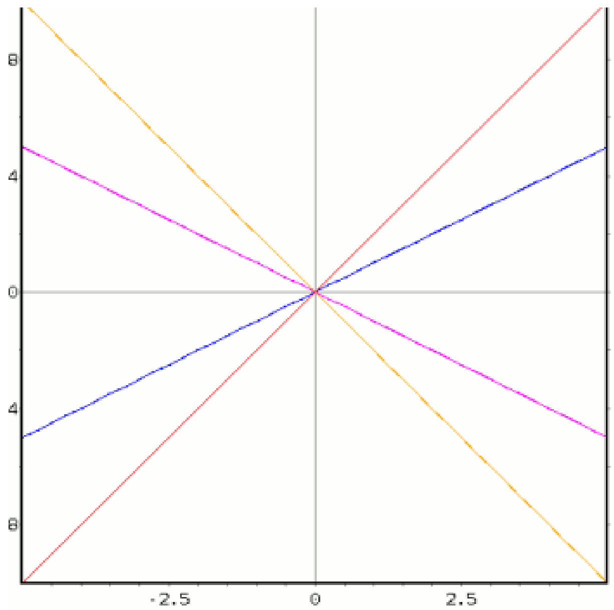


dove m è dato dal rapporto tra lo spostamento verticale per andare da un punto all'altro e quello corrispondente orizzontale. N.B: lo spostamento si intende positivo se è nei versi positivi (destra, alto), negativo nei versi negativi (sinistra, basso).

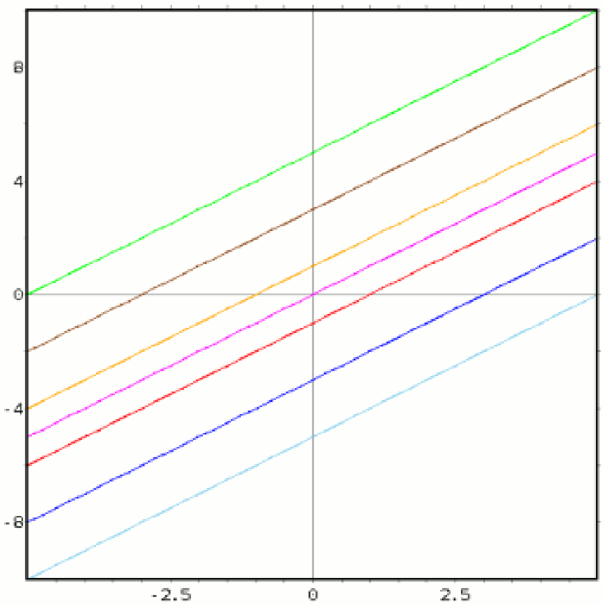
La retta del grafico avrà pertanto equazione $y = -3x + 3$.

In particolare:

1. $y = kx$ se $k = 1, 2, -1, -2$; tutte le rette, avendo $q = 0$, passano per l'origine. Sono distinguibili solo per il diverso coefficiente angolare: maggiore è il valore, maggiore è la pendenza, se $m < 0$ la retta ha pendenza negativa

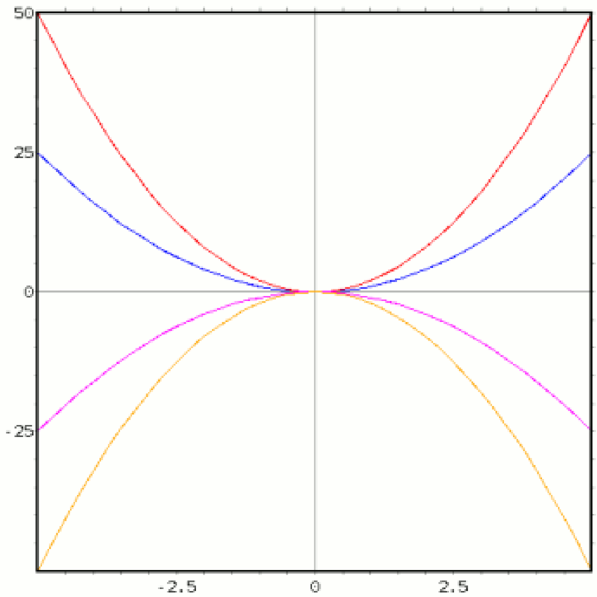


$y = x+b$ se $b = 1, 2, -1, -2$; questa equazione con parametro b identifica un fascio di rette improprie, cioè rette tra loro parallele, che hanno quindi in comune lo stesso coefficiente angolare (stessa direzione), ma intersecano l'asse y in punti distinti:

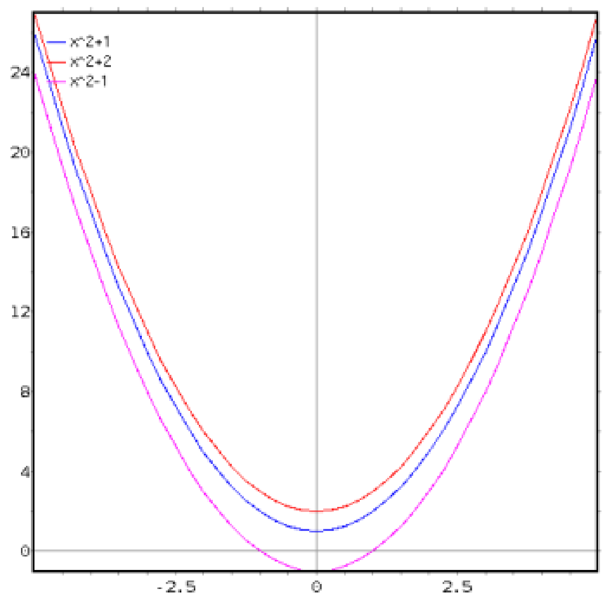


Esercizio 30. Costruire i grafici delle funzioni razionali intere di secondo grado:

- $y = ax^2$ se $a = 1, 2, -1, -2$; questa è l'equazione di una parabola avente vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate. Il parametro a distingue le diverse concavità delle parabola, mentre le incognite x, y caratterizzano l'insieme dei punti del luogo geometrico o gli insiemi di elementi fra loro in proporzionalità quadratica

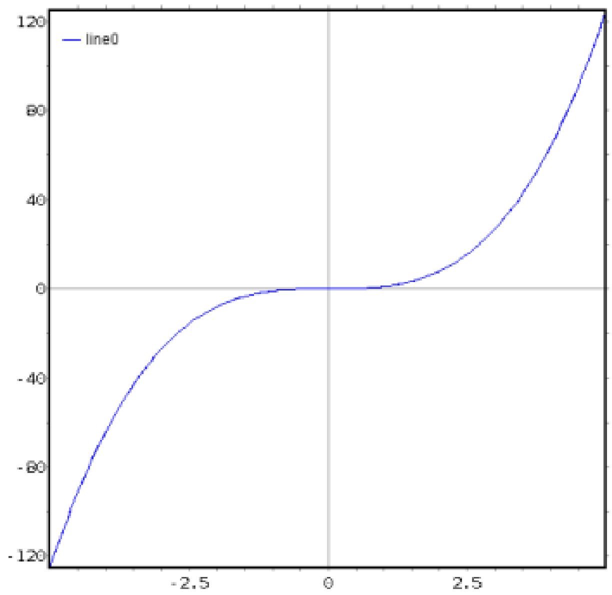


$y = x^2 + c$ se $c = 1, 2, -1$; in questo caso si tratta di parabole traslate verticalmente, in quanto il parametro c rappresenta l'ordinata del vertice appartenente all'asse delle ordinate

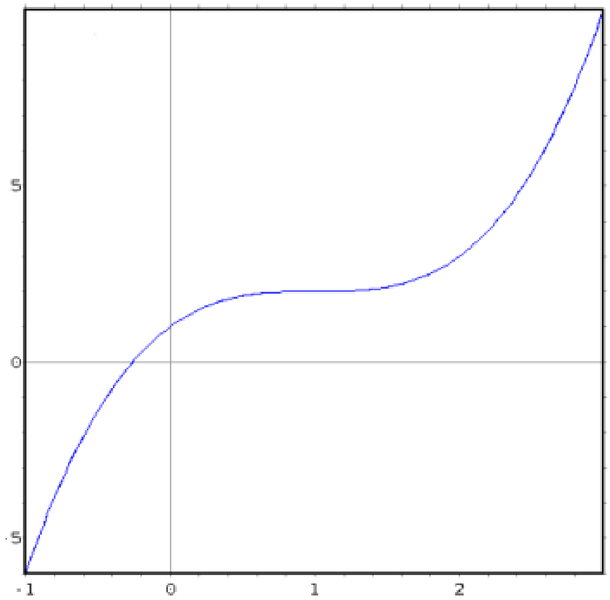


Esercizio 31. Costruire i grafici delle funzioni razionali intere di grado superiore al secondo

$y = x^3$ (parabola cubica) funzione dispari con punto di inversione nell'origine



$y = 2 + (x-1)^3$ possiamo immaginare questa funzione come il prodotto di una traslazione orizzontale di vettore $(1,0)$ (funzione $(x-1)^3$e di un successiva traslazione verticale di vettore $(0,2)$ della funzione $y = x^3$. Il grafico mostra la funzione base e le successive traslazioni


5
0
-5
-1
0
1
2

3 Dai problemi alle funzioni

Esercizio 32. Il costo totale per una pasticceria per produrre 150 torte di qualità è di 225 \$, mentre il costo totale per produrre 175 torte è 247 \$. Sia y il costo totale per x torte. Supponiamo che una linea retta possa approssimare i dati. (a) Trova e interpreta la pendenza della linea di costo (b) Determina un'equazione che descriva i dati. (c) Usa la tua risposta al quesito (b) per determinare un'approssimazione del costo di 200 torte.

Soluzione. Se assumiamo una approssimazione di tipo lineare, il problema va analizzata prendendo come riferimento matematico l'equazione di una retta. Per il caso a), la pendenza è il coefficiente angolare della retta, cioè

$$m = \frac{225 - 247}{150 - 175} = \frac{22}{25}$$

L'equazione che può descrivere i dati, ricordando che l'equazione generale di una retta in forma esplicita è data da $y = mx + q$, e sapendo che il costo è rappresentato da y e il numero di torte da x,

$$225 = \frac{22}{25} \times 150 + q$$

da cui

$$q = 225 - 132 = 93$$

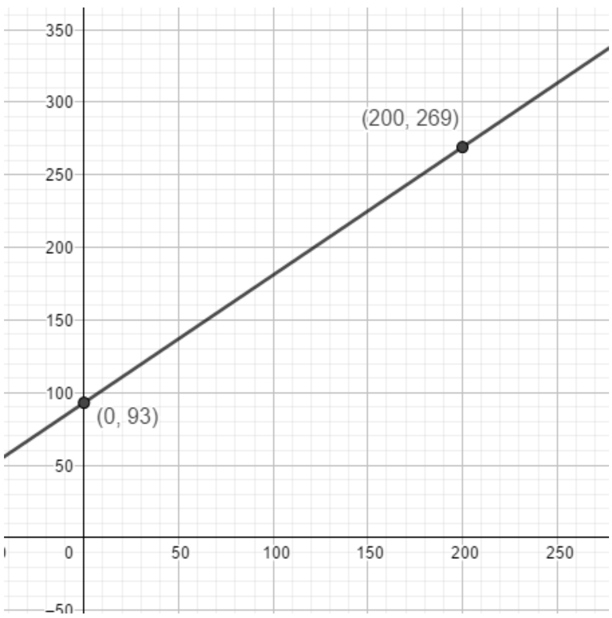
pertanto, l'equazione della retta sarà

$$y = \frac{22}{25}x + 93$$

Se le torte sono 200 il costo totale sarà dato da

$$y = \frac{22}{25} \times 200 + 93 = 22 \times 8 + 93 = 269$$

Se rappresentiamo graficamente la funzione possiamo ritrovare tutte le condizioni calcolate e possiamo dedurre che 93 \$ è il costo fisso di produzione indipendente dal numero di torte prodotte.

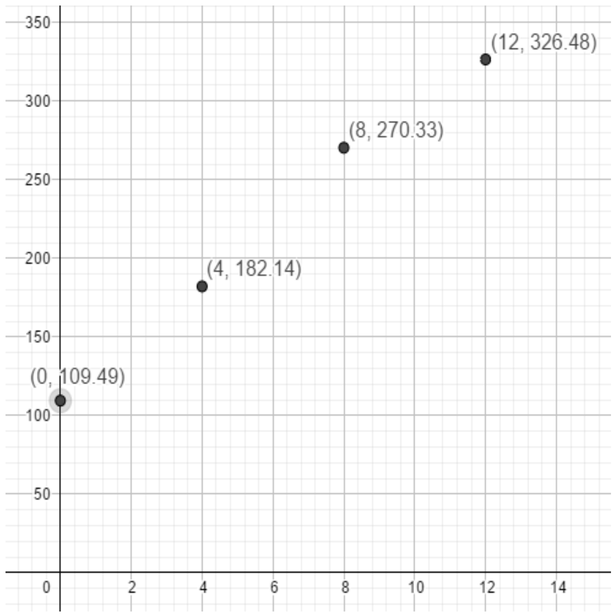


Esercizio 33. La seguente tabella mostra gli abbonamenti per i telefoni cellulari negli Stati Uniti (in milioni) per anno dal 2000 al 2012.

Anno	2000	2004	2008	2012
Abbonati $\cdot 10^6$	$109,48$	$182,14$	$270,33$	$326,48$

1. Tracciare i dati indicando con $t = 0$ l'anno 2000. Discutere quanto bene i dati si adattano a una linea retta
2. Determina un'equazione lineare che approssima il numero di abbonati che utilizzano i punti $(0; 109,48)$ e $(12; 326,48)$
3. Ripetere il (2) usando i punti $(4; 182,14)$ e $(12; 326.48)$
4. Discuti perché le tue risposte ai punti (2) e (3) sono simili ma non identiche.
5. Usando le equazioni dei punti (2) e (3), approssimare il numero di abbonati di telefoni cellulari nel 2010. Confronta il tuo risultato con il valore effettivo di $296,29$ milioni.

Soluzione. 1) Grafico per punti



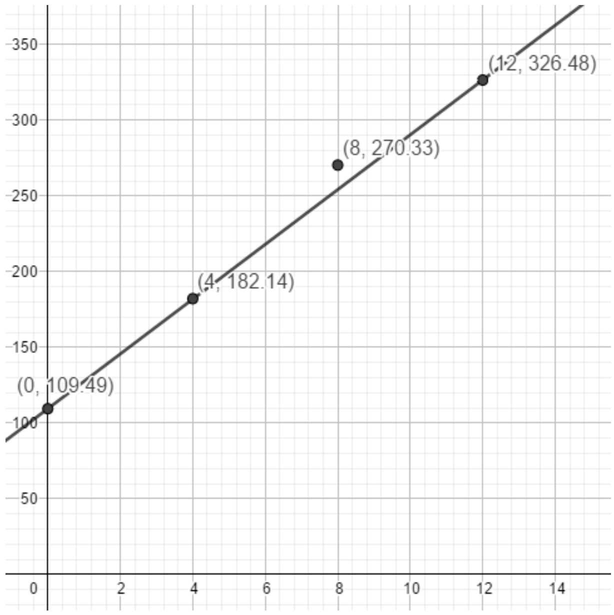
Si può osservare che i punti si dispongono con buona approssimazione su una retta tranne il punto $(8; 270,33)$ che appare assumere un valore un poco maggiore.

2) Tracciamo la prima retta che intende descrivere i valori indicati attraverso il primo e l'ultimo valore calcolando la sua equazione

$$m = \tfrac{326,48-109,48}{12-0} = \tfrac{217}{12} \qquad q = 109,49$$

la retta sarà

$$y = \frac{217}{12}x + 109,49$$



3) Tracciamo la seconda retta che intende descrivere i valori indicati attraverso il secondo e l'ultimo valore calcolando la sua equazione

$$m = \frac{326{,}48-182{,}14}{12-4} = \frac{144{,}34}{8} = \frac{7217}{400} = 18,0425$$

$$182,14 = \frac{7217}{400} \times 4 + q \quad 182,14 - 72,17 = q \quad q = 109,97$$

la retta sarà

$$y = \frac{7217}{400}x + 109,97$$

Come si vede, i due valori di q differiscono di $0,48$, cioè del $4,5$ per mille, mentre il valore del coefficiente angolare differisce di $0,4$, cioè del 2%. Utilizzando le unità di misura nel grafico, tali differenze sono indistinguibili.

4) Calcoliamo ora il valore che si ottiene da questa rette per l'anno 2010, ponendo cioè $x = 10$. Nella prima retta e nella seconda retta avremo

$$y = \frac{217}{12} \times 10 + 109,49 = 290,32 \qquad y = \frac{7217}{400} \times 10 + 109,97 = 290,395$$

Il valore reale è $296,29$ con un errore di circa il 2%.

Esercizio 34. L'intervallo di tempo tra l'inizio una infezione da HIV e l'eventuale sviluppo dei sintomi in una persona dell'AIDS è un problema importante. Il metodo di infezione da l'HIV influisce sull'intervallo di tempo prima che si sviluppi l'AIDS. Uno studio su pazienti affetti da HIV che sono stati infettati per via endovenosa per l'uso di droghe ha scoperto che il 17% dei pazienti aveva l'AIDS dopo 4 anni, e il 33% aveva sviluppato la malattia dopo 7 anni. La relazione tra l'intervallo di tempo e la percentuale di pazienti con l'AIDS può essere descritto accuratamente con un'equazione lineare. (a) Scrivi un'equazione lineare $y = mt + q$ che descriva i dati, utilizzando le coppie ordinate $(4; 0,17)$ e $(7; 0.33)$. (b) Usa l'equazione trovata per prevedere il numero di anni prima che metà di questi pazienti soffra di AIDS.

Soluzione. La prima richiesta chiede sostanzialmente di ricavare l'equazione della retta passante per i due punti indicati e rappresentabili su un piano cartesiano.

$$m = \frac{0{,}33-0{,}17}{7-4} = \frac{0{,}16}{3} = \frac{4}{75} = 0,05$$

$$0,17 = \frac{4}{75} \times 14 + q \quad \frac{17}{100} - \frac{56}{75} = q \quad q = -\frac{173}{300}$$

la retta avrà equazione

$$y = \frac{4}{75}t - \frac{173}{300}$$

b) Per trovare il numero di anni prima che metà dei pazienti sviluppi la malattia, sappiamo che $y = 0,50$, cioè la metà in percentuale, per cui

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{75}t - \frac{173}{300}$$

da cui, risolvendo rispetto a t, avremo

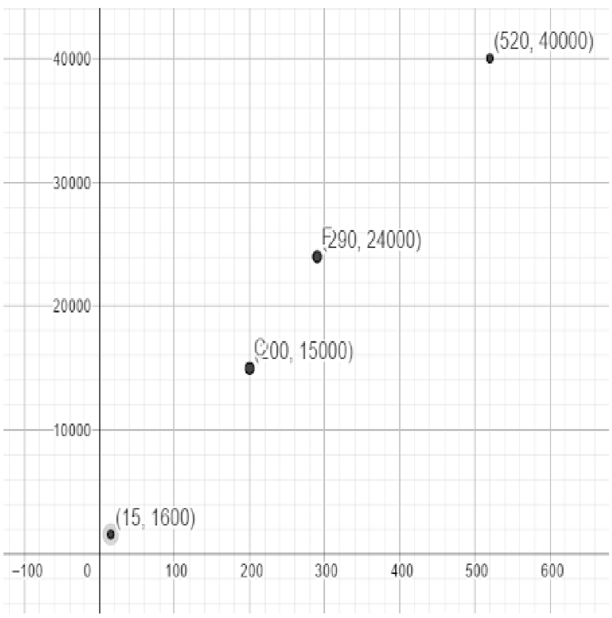
$$150 = 16t - 173 \quad 323 = 16t \quad t = \tfrac{323}{16} = 20,2\,anni$$

Esercizio 35. La tabella elenca le distanze (in megaparsec, dove $1\,Mpc = 3,1 \cdot 10^{19}\,km$) e velocità (in) di quattro galassie che si allontanano rapidamente dalla terra.

Galassia	Distanza	Velocità
Virga	15	1600
Ursa Minor	200	15000
Corona Borealis	290	24000
Bootes	520	40000

1. Traccia i punti dati, lasciando che x rappresenti la distanza e y la velocità. I punti si dispongono secondo un modello approssimativamente lineare?
2. Scrivi un'equazione lineare $y = mx$ per esprimere questi dati, usando la coppia ordinata $(520, 40000)$.
3. La galassia Hydra ha una velocità di $60.000\,\frac{km}{s}$. Usa la tua equazione per approssimare la sua distanza dalla Terra.
4. Il valore di m nell'equazione è chiamato costante di Hubble. La costante di Hubble può essere utilizzata per stimare l'età dell'universo A (in anni) usando la formula
$$A = \frac{9,5 \cdot 10^{11}}{m}$$
Approssima A usando il valore di m.

Soluzione. 1) Rappresentiamo i dati in un piano cartesiano



osservando la distribuzione dei punti si può dedurre che con buona approssimazione si dispongono lungo una linea retta, quindi si possono descrivere con un modello lineare.

2) una retta del tipo $y = mx$ è passante per l'origine del piano cartesiano; basta quindi calcolare m

$$m = \frac{40000}{520} = \frac{1000}{13}$$

pertanto $y = \frac{1000}{13}x$

3) Se la velocità di Hydra è di $60000\,km/s$, allora la distanza sarà $60000 = \frac{1000}{13}x$, da cui

$$x = 780\,pc$$

4) Calcoliamo l'età dell'universo con la relazione indicata utilizzando il nostro valore della costante

$$A = \frac{9,5 \cdot 10^{11}}{\frac{1000}{13}} = 1,235 \cdot 10^{10}\,anni$$

Esercizio 36. Siano le funzioni dell'offerta e della domanda di zucchero date da

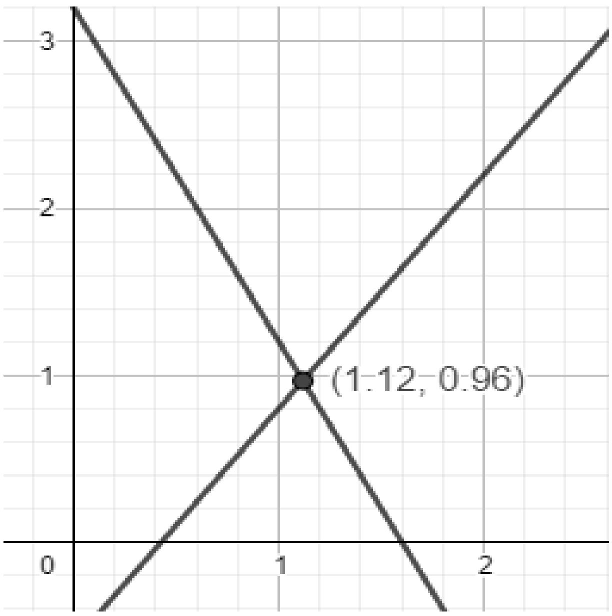
$$y_{off} = 1,4x - 0,6 \quad y_{dom} = -2x + 3,2$$

dove x è la quantità in kg e y il costo totale

a) Rappresenta i dati sullo stesso piano cartesiano

b) trova la quantità e il costo di equilibrio

Soluzione. Rappresentiamo nel grafico le due rette piano cartesiano



b) le condizioni di equilibrio richiedono che

$$1,4x - 0,6 = -2x + 3,2$$

cioè

$$3,4x = 3,8 \quad x = \frac{19}{17} \qquad y = \frac{7}{5} \times \frac{19}{17} - \frac{3}{5} = \frac{82}{85}$$

Esercizio 37. La relazione tra massa corporea ed età dei lupi grigi maschi della Foresta Nazionale Superiore del Minnesota nord-orientale può essere stimata da $M(x) = 27,14 + 3,8x - 0,32x^2$ con $1 \leq x \leq 9$, dove $M(x)$ è misurato in chilogrammi e x è l'età stimata dei lupi in anni. (a) Cosa prevede questa formula per la massa corporea di un lupo maschio di 2 anni? e di di 7 anni? (b) Cosa prevede questa formula per la massa corporea massima, e quando succede?

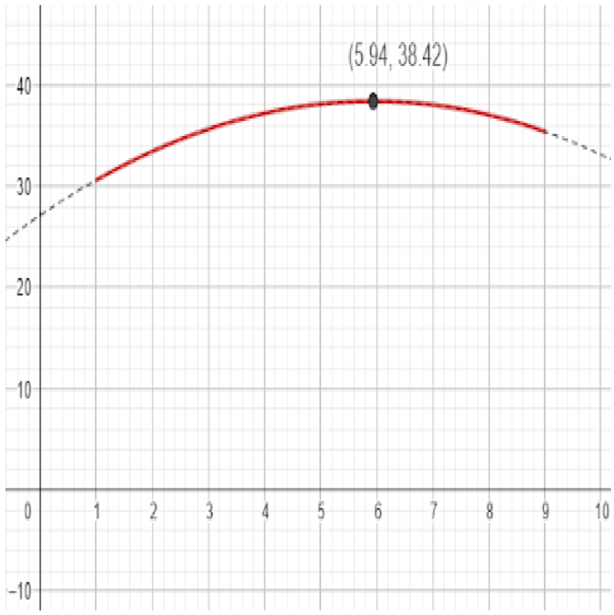
Soluzione. La relazione è espressa da un funzione polinomiale intera di secondo grado, il cui grafico è rappresentato da una parabola con la concavità rivolta verso il basso perché il coefficiente del termine di secondo grado è negativo. Per rispondere alla prima domanda, basta sostituire ad x le due età indicate:

$$M(2) = 27,14 + 3,8 \times 2 - 0,32 \times 2^2 = 33,46\,kg$$
$$M(7) = 27,14 + 3,8 \times 7 - 0,32 \times 7^2 = 38,06\,kg$$

Il valore massimo della massa corrisponderà all'ordinata del vertice della parabola e l'età all'ascissa. Calcoliamo quindi le coordinate del vertice

$$V_x = -\tfrac{b}{2a} = \tfrac{3,8}{0,64} = 5,94 \qquad V_y = \tfrac{-b^2+4ac}{4a} = -\tfrac{-3,8^2+4\times(-0,32)\times 27,14}{4\times(-0,32)} = 38,42$$

Ecco il grafico della funzione nel dominio indicato.



Esercizio 38. Distanza di arresto. In base ai dati del National Traffic Safety Institute, la distanza di arresto y in piedi di un'auto che viaggia a x mph può essere descritta dall'equazione $y = 0,056057x^2 + 1,06657x$. Fonte: National Traffic Safety Istituire. (a) Trova la distanza di arresto per un'auto che viaggia a 25 mph. (b) Quanto velocemente puoi guidare se devi essere certo di fermarti entro 150 piedi?

Soluzione. a) Essendo x la velocità, troviamo la distanza di arresto sostituendo il valore assegnato

$$y = 0,056057 \times 25^2 + 1,06657 \times 25 = 40,4\,piedi$$

b) Se la distanza è di 150 piedi, allora la velocità deve essere

$$0,056057x^2 + 1,06657x = 150$$

risolvendo l'equazione di secondo grado, abbiamo

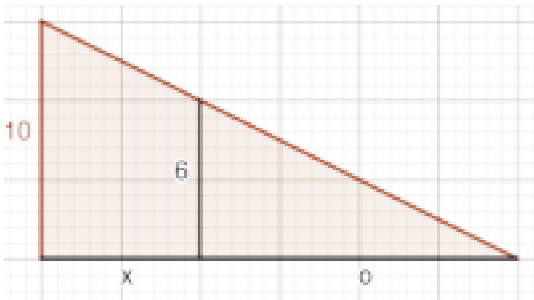
$$x = \frac{-1,06657 \pm \sqrt{1,06657^2 - 4 \times 0,056057 \times (-150)}}{2 \times 056057} = 43,0828$$

considerando la sola radice positiva.

4 Funzioni continue

4.1 Costruire una relazione tra due variabili

Esercizio 39. Un uomo alto 6 piedi si trova vicino a un lampione alto 10 piedi. Trovare la lunghezza dell'ombra in funzione della sua distanza dal lampione.



Soluzione. 1° passo: osservando la figura, indichiamo con x la distanza uomo-lampione, con o l'ombra dell'uomo sul terreno. Si tratta di costruire una relazione del tipo $o = f(x)$.

2° passo: Ricordando le proprietà del triangolo rettangolo, possiamo osservare la relazione di similitudine tra i due triangoli del disegno, per cui

$$10 : 6 = (x + o) : o$$

cioè

$$\frac{5}{3} = \frac{x+o}{o}$$

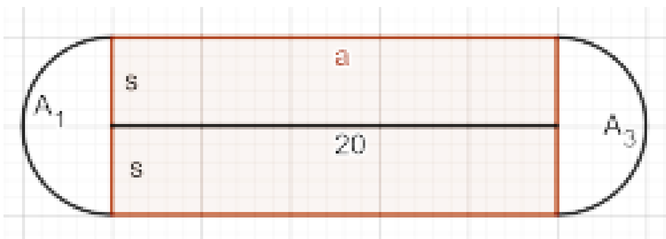
e svolgendo, si ottiene

$$5o - 3o = 3x \quad o = \frac{3}{2}x$$

tutte le variabili devono essere positive rappresentando delle lunghezze, per cui il dominio di questa funzione sarà

$$D = [0; +\infty]$$

Esercizio 40. Un incendio boschivo inizia lungo un segmento rettilineo di lunghezza $20\,m$ e si espande in tutte le direzioni alla velocità di $2\,^{m}/_{s}$. Trovare l'area bruciata in funzione del tempo. (Il disegno mostra l'area coinvolta)



Soluzione. Poniamo A=area totale bruciata; $A_1 = A_3$: area dei due semicerchi; A_2 = area del rettangolo; s = distanza distribuzione incendio; t = tempo.

Calcoliamo l'area della figura come somma delle aree delle singole parti in funzione di s:

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi}{2}s^2 \quad A_2 = 40s \quad A_{tot} = A = \pi s^2 + \quad 40s$$

Tenendo conto della modalità di espansione dell'incendio, cioè $s = 2t$ con $t \geq 0$, riscriviamo le aree in funzione del tempo

$$A_1 + A_3 = 2 \cdot \frac{\pi}{2}(2t)^2 \quad A_2 = 40 \times 2t \quad A_{tot} = A = 4\pi t^2 + \quad 80t$$

Esercizio 41. Trovare il perimetro p di un quadrato in funzione della sua area.

Soluzione. Poniamo l : lato del quadrato; A : area del quadrato. Pertanto

$$p = 4l \quad A = l^2$$

ma $l = \sqrt{A}$ (entrambi devono essere numeri positivi o nulli), per cui

$$p = 4\sqrt{A}$$

Esercizio 42. Trovare il volume di una sfera in funzione della sua superficie. Sia r : *raggio* e V : *volume*. Ricordiamo che

$$V_{sfera} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad S = 4\pi r^2$$

dove $r \geq 0$, per cui

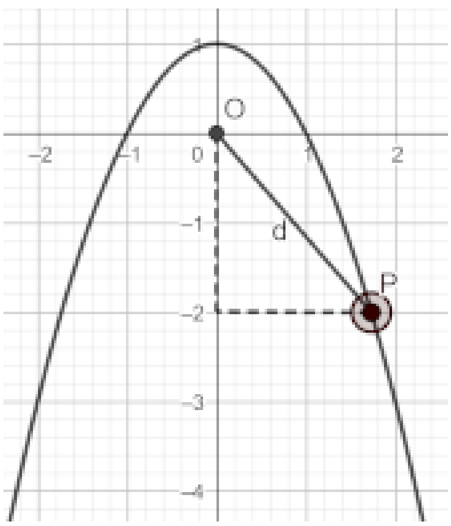
$$V = 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{Ar}{3}$$

ma $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, per cui

$$V = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{S^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{\pi}}$$

Esercizio 43. Trovare la distanza d tra l'origine e un punto della parabola $y = 1 - x^2$ in funzione di x.

Soluzione. Ricordando le proprietà delle curve di secondo grado, la parabola ha vertice nel punto $(0, 1)$ e concavità rivolta verso il basso ($a = -1 < 0$); inoltre interseca l'asse x nei punti $(\pm 1, 0)$. Si può quindi rappresentare graficamente la parabola. Ogni suo punto ha coordinate $(x, y) \equiv \left(x, 1 - x^2\right)$.



Applichiamo la formula della distanza tra due punti

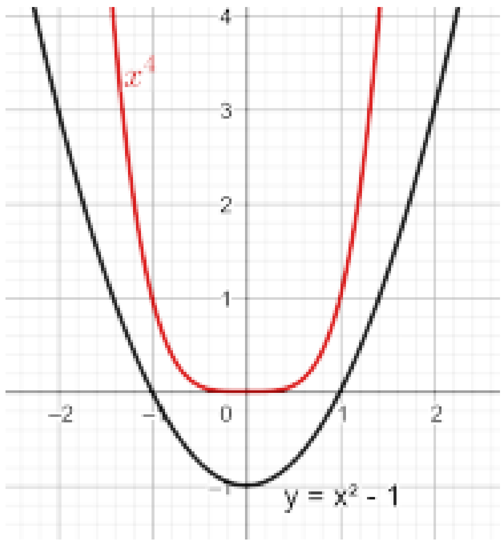
$$d=\sqrt{x^2+\left(1-x^2\right)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}$$

Il polinomio sotto radice è sempre positivo; $x^4-x^2+1>0$ lo verifichiamo graficamente riscrivendo

$$x^4>x^2-1$$

se poniamo $y=x^4$ si ha il sistema

$$\begin{cases} y=x^4 \\ y>x^2-1 \end{cases}$$



Esercizio 44. Una nave viaggiante verso nord a 30 km/h passa per l'origine al tempo $t=0\,h$. Una secondo nave che si muove verso est a 30 km/h passa per l'origine al tempo $t=1\,h$. Trovare la distanza z tra di esse in funzione del tempo t.

Soluzione. Le due navi si muovono di moto rettilineo uniforme, per cui le legge orarie sono

$$s_1=30t \quad s_2=-30+30t \quad =30\,(t-1)$$

La distanza tra di esse sarà

$$z=\sqrt{(30t)^2+[30\,(t-1)]^2}=30\sqrt{2t^2-2t+1}$$

Esercizio 45. Una palla è scagliata da terra e il suo percorso è descritto dalle equazioni

$$x=bt \quad y=t-16t^2$$

Quanto deve viaggiare nella direzione x (orizzontale) prima di giungere nuovamente a terra?

Soluzione. Questo è evidente un caso di un moto parabolico (classicamente il moto del proiettile), e le due equazioni fornite descrivono il moto rettilineo uniforme lungo l'asse orizzontale, x, (dopo il lancio la palla non è più soggetta a una forza con componente orizzontale) e il moto uniformemente decelerato della palla lungo l'asse verticale a causa dell'azione della forza di gravità. Troviamo l'equazione del moto, ricavando t dalla prima equazione e sostituendo poi il valore trovato nella seconda equazione

$$t = \tfrac{x}{b} \quad y = \tfrac{x}{b} - 16\left(\tfrac{x}{b}\right)^2$$

svolgendo si ha

$$y = \frac{x}{b} - 16\frac{x^2}{b^2} = x\left(\frac{16}{5}x - 1\right) = 0$$

Come si vede, questa è l'equazione di una parabola, le cui soluzioni rappresentano dal punto di vista analitico le intersezioni con l'asse x, e, per il nostro problema, il punto di partenza e di arrivo della palla rispetto al suolo (la cosiddetta gittata). Pertanto se $y = 0$, cioè la retta dell'asse x

$$x\left(\frac{16}{5}x - 1\right) = 0$$

le due soluzioni sono $x_1 = 0$ (il punto di partenza) e $x_2 = \dfrac{b}{16}$, il punto in cui la palla cade a terra dopo il volo.